Γραμμικη Αλγεβρα II

Ασκησεις - Φυλλαδιο 6

Διδασκοντες: Ν. Μαρμαρίδης - Α. Μπεληγιάννης
Βοηθοι Ασκησεων: Χ. Ψαρουδάκης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:
http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII/LAII.html

16 - 5 - 2012

Άσκηση 1. *Έστω $\mathcal{V}$ και $\mathcal{W}$ δυο υπόχωροι του Ευκλείδειου χώρου $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$.*

(1) *Αν $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$ να δείξετε ότι: $\mathcal{W}^\perp \subseteq \mathcal{V}^\perp$.*
(2) *Να δείξετε ότι: $(\mathcal{V} + \mathcal{W})^\perp = \mathcal{V}^\perp \cap \mathcal{W}^\perp$.*
(3) *Αν $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E} < \infty$, να δείξετε ότι:*
   (α') $(\mathcal{V}^\perp)^\perp = \mathcal{V}$.
   (β') $(\mathcal{V} \cap \mathcal{W})^\perp = \mathcal{V}^\perp + \mathcal{W}^\perp$.

Λύση. (1) *Έστω $\vec{x} \in \mathcal{W}^\perp$. Τότε*

$$\langle \vec{x}, \vec{w} \rangle = 0, \forall \vec{w} \in \mathcal{W} \text{ και } \mathcal{V} \subseteq \mathcal{W} \implies \langle \vec{x}, \vec{v} \rangle = 0, \forall \vec{v} \in \mathcal{V} \implies \vec{x} \in \mathcal{V}^\perp \implies \mathcal{W}^\perp \subseteq \mathcal{V}^\perp$$

(2) *Έχουμε ότι $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V} + \mathcal{W}$ και $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V} + \mathcal{W}$. Άρα από το ερώτημα (1) έπεται ότι*

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathcal{V} + \mathcal{W})^\perp \subseteq \mathcal{V}^\perp \\ \\ (\mathcal{V} + \mathcal{W})^\perp \subseteq \mathcal{W}^\perp \end{array} \right. \implies (\mathcal{V} + \mathcal{W})^\perp \subseteq \mathcal{V}^\perp \cap \mathcal{W}^\perp \qquad (*)$$

Έστω $\vec{x} \in \mathcal{V}^\perp \cap \mathcal{W}^\perp$, δηλαδή $\vec{x} \in \mathcal{V}^\perp$ και $\vec{x} \in \mathcal{W}^\perp$. Άρα έχουμε ότι $\langle \vec{x}, \vec{v} \rangle = 0$ και $\langle \vec{x}, \vec{w} \rangle = 0$, για κάθε $\vec{v} \in \mathcal{V}$ και $\vec{w} \in \mathcal{W}$. Έστω $\vec{y} = \vec{v} + \vec{w}$ με $\vec{v} \in \mathcal{V}$ και $\vec{w} \in \mathcal{W}$. Τότε

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{x}, \vec{w} \rangle = 0 \implies \vec{x} \in (\mathcal{V} + \mathcal{W})^\perp \implies \mathcal{V}^\perp \cap \mathcal{W}^\perp \subseteq (\mathcal{V} + \mathcal{W})^\perp \qquad (**)$$

Από τις σχέσεις $(*)$ και $(**)$ έπεται το ζητούμενο: $(\mathcal{V} + \mathcal{W})^\perp = \mathcal{V}^\perp \cap \mathcal{W}^\perp$.

(3) (α') *Έστω $\vec{x} \in \mathcal{V}$. Τότε έπεται άμεσα ότι $\vec{x} \subseteq (\mathcal{V}^\perp)^\perp = \{\vec{x} \in \mathcal{E} \mid \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0, \forall \vec{y} \in \mathcal{V}^\perp\}$ και άρα $\mathcal{V} \subseteq (\mathcal{V}^\perp)^\perp$. Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι για κάθε υπόχωρο $\mathcal{Z}$ ενός Ευκλείδειου χώρου $\mathcal{E}$ πεπερασμένης διάστασης ισχύει ότι: $\mathcal{E} = \mathcal{Z} \oplus \mathcal{Z}^\perp$. Επιλέγοντας διαδοχικά $\mathcal{Z} = \mathcal{V}$ και $\mathcal{Z} = \mathcal{V}^\perp$, θα έχουμε:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{V}^\perp \\ \\ \mathcal{E} = \mathcal{V}^\perp \oplus (\mathcal{V}^\perp)^\perp \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V} + \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}^\perp \\ \\ \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}^\perp + \dim_{\mathbb{R}} (\mathcal{V}^\perp)^\perp \end{array} \right.$$

και επομένως

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V} = \dim_{\mathbb{R}} (\mathcal{V}^\perp)^\perp$$

Επειδή $\mathcal{V} \subseteq (\mathcal{V}^\perp)^\perp$ και $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V} = \dim_{\mathbb{R}} (\mathcal{V}^\perp)^\perp$, έπεται ότι $\mathcal{V} = (\mathcal{V}^\perp)^\perp$.

(β') *Για το δεύτερο ερώτημα του (3) χρησιμοποιώντας το (2) και το $(3)(\alpha')$ έχουμε:*

$$(\mathcal{V}^\perp + \mathcal{W}^\perp)^\perp = (\mathcal{V}^\perp)^\perp \cap (\mathcal{W}^\perp)^\perp = \mathcal{V} \cap \mathcal{W} \implies$$
$$(\mathcal{V} \cap \mathcal{W})^\perp = \big((\mathcal{V}^\perp + \mathcal{W}^\perp)^\perp\big)^\perp = \mathcal{V}^\perp + \mathcal{W}^\perp$$

Άσκηση 2. *Θεωρούμε τον ακόλουθο υπόχωρο του $\mathbb{R}^n$:*

$$\mathcal{V} = \big\{\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n = 0\big\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του υπόχωρου $\mathcal{V}^\perp$, όταν:

(1) *Ο $\mathbb{R}^n$ είναι εφοδιασμένος με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο.*

(2) *Ο $\mathbb{R}^n$ είναι εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο*

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + \cdots + nx_ny_n$$

όπου: $\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ *και* $\vec{y} = (y_1, \cdots, y_n)$.

Λύση. *Έχουμε:*

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \big\{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n = 0\big\} \\ &= \big\{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = -2x_2 - \cdots - nx_n\big\} \\ &= \big\{(-2x_2 - \cdots - nx_n, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}\big\} \\ &= \big\{x_2(-2, 1, 0, \cdots, 0) + \cdots + x_n(-n, 0, \cdots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n \mid x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}\big\} \\ &= \big\langle(-2, 1, 0, \cdots, 0), (-3, 0, 1, \cdots, 0), \cdots, (-n, 0, \cdots, 0, 1)\big\rangle \end{aligned}$$

Τα διανύσματα $\{(-2, 1, 0, \cdots, 0), (-3, 0, 1, \cdots, 0), \cdots, (-n, 0, \cdots, 0, 1)\}$ *αποτελούν βάση του* $\mathcal{V}$, *αφού είναι γραμμικά ανεξάρτητα, και άρα* $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V} = n - 1$. *Τότε:*

$$\mathbb{R}^n = \mathcal{V} \oplus \mathcal{V}^{\perp} \implies \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V} + \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}^{\perp} \implies \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}^{\perp} = 1$$

Παρατηρούμε ότι το διάνυσμα $(1, 2, \cdots, n) \in \mathcal{V}^{\perp}$ *διότι από τη περιγραφή του υπόχωρου* $\mathcal{V}$ *έχουμε*

$$\langle (x_1, x_2, \cdots, x_n), (1, 2, \cdots, n) \rangle = x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n = 0$$

με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο. Αφού λοιπόν το μη-μηδενικό διάνυσμα $(1, 2, \cdots, n) \in \mathcal{V}^{\perp}$ *και* $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}^{\perp} = 1$ *έπεται ότι το σύνολο* $\{(1, 2, \cdots, n)\}$ *αποτελεί μια βάση του* $\mathcal{V}^{\perp}$. *Συνεπώς, μια ορθοκανονική βάση του* $\mathcal{V}^{\perp}$, *με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο, είναι το μονοσύνολο:*

$$\text{ΟΚΒ}: \quad \left\{ \frac{(1, 2, \cdots, n)}{\sqrt{1 + 2^2 + \cdots + n^2}} \right\}$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας το δεύτερο εσωτερικό γινόμενο και την περιγραφή του $\mathcal{V}$ *παρατηρούμε ότι το διάνυσμα* $(1, 1, \cdots, 1) \in \mathcal{V}^{\perp}$, *διότι*

$$\langle (x_1, x_2, \cdots, x_n), (1, 1, \cdots, 1) \rangle = x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n = 0$$

Επειδή το μη-μηδενικό διάνυσμα $(1, 1, \cdots, 1) \in \mathcal{V}^{\perp}$ *και* $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}^{\perp} = 1$ *έπεται ότι το μονοσύνολο* $\{(1, 1, \cdots, 1)\}$ *αποτελεί μια βάση του* $\mathcal{V}^{\perp}$. *Επομένως μια ορθοκανονική βάση του* $\mathcal{V}^{\perp}$, *με το δεύτερο εσωτερικό γινόμενο, είναι το σύνολο:*

$$\text{ΟΚΒ}: \quad \left\{ \frac{(1, 1, \cdots, 1)}{\sqrt{1 + 2 + \cdots + n}} \right\} \qquad \square$$

Άσκηση 3. *Θεωρούμε τον Ευκλείδειο χώρο* $\mathbb{R}^4$ *εφοδιασμένο με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο και τους υποχώρους του*

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + 3y + z = 0\} \\ \mathcal{W} &= \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + w = 0\} \end{aligned}$$

(1) *Να εξετάσετε αν οι* $\mathcal{V}$ *και* $\mathcal{W}$ *είναι ορθοσυμπληρωματικοί* [1].

(2) *Βρείτε το ορθογώνιο συμπλήρωμα* $(\mathcal{V} \cap \mathcal{W})^{\perp}$ *του υπόχωρου* $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$.

Λύση. *Έχουμε:*

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \big\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + 3y + z = 0\big\} \\ &= \big\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid z = -2x - 3y\big\} \\ &= \big\{(x, y, -2x - 3y, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x, y, w \in \mathbb{R}\big\} \\ &= \big\{x(1, 0, -2, 0) + y(0, 1, -3, 0) + w(0, 0, 0, 1) \in \mathbb{R}^4 \mid x, y, w \in \mathbb{R}\big\} \\ &= \langle (1, 0, -2, 0), (0, 1, -3, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle \end{aligned}$$

[1] Δηλαδή αν $\mathbb{R}^4 = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$ και $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$, $\forall \vec{v} \in \mathcal{V}$ και $\forall \vec{w} \in \mathcal{W}$.

και

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \big\{(x,y,z,w) \ \in \ \mathbb{R}^4 \ \mid \ x-y+w=0\big\} \\ &= \big\{(x,y,z,w) \ \in \ \mathbb{R}^4 \ \mid \ y=x+w\big\} \\ &= \big\{(x,x+w,z,w) \ \in \ \mathbb{R}^4 \ \mid \ x,z,w\in\mathbb{R}\big\} \\ &= \big\{x(1,1,0,0)+w(0,1,0,1)+z(0,0,1,0) \ \in \ \mathbb{R}^4 \ \mid \ x,z,w\in\mathbb{R}\big\} \\ &= \langle(1,1,0,0),(0,1,0,1),(0,0,1,0)\rangle \end{aligned}$$

Τα σύνολα

$$\big\{(1,0,-2,0),(0,1,-3,0),(0,0,0,1)\big\} \subseteq \mathcal{V} \qquad \textit{και} \qquad \big\{(1,1,0,0),(0,1,0,1),(0,0,1,0)\big\} \subseteq \mathcal{W}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητα και άρα αποτελούν βάσεις των υπόχωρων $\mathcal{V}$ και $\mathcal{W}$ αντίστοιχα. Άρα

$$\dim_{\mathbb{R}}\mathcal{V}=3 \quad \textit{και} \quad \dim_{\mathbb{R}}\mathcal{W}=3$$

Αν οι $\mathcal{V}$ και $\mathcal{W}$ είναι ορθοσυμπληρωματικοί τότε $4=\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^4=\dim_{\mathbb{R}}\mathcal{V}+\dim_{\mathbb{R}}\mathcal{W}=3+3$, που προφανώς δεν ισχύει.

Διαφορετικά: αν οι υπόχωροι $\mathcal{V}$ και $\mathcal{W}$ ήσαν ορθοσυμπληρωματικοί, τότε θα έπρεπε να ισχύει: $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle=0$ για κάθε $\vec{x}\in\mathcal{V}$ και $\vec{y}\in\mathcal{W}$. Όμως $\langle(0,1,-3,0),(0,1,0,1)=1\neq 0$ και άρα οι $\mathcal{V}$ και $\mathcal{W}$ δεν είναι ορθοσυμπληρωματικοί.

Στην συνέχεια θα βρούμε το ορθογώνιο συμπλήρωμα $(\mathcal{V}\cap\mathcal{W})^\perp$ του υπόχωρου $\mathcal{V}\cap\mathcal{W}$. Άρα πρώτα πρέπει να βρούμε μια βάση του $\mathcal{V}\cap\mathcal{W}$. Από την εξίσωση $x-y+w=0$ έχουμε $x=y-w$ και αντικαθιστώντας στην $2x+3y+z=0$ έπεται ότι $2y-2w+3y+z=0$, δηλαδή $y=\frac{2}{5}w-\frac{1}{5}z$. Άρα βρίσκουμε ότι $x=-\frac{3}{5}w-\frac{1}{5}z$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}\cap\mathcal{W} &= \big\{(x,y,z,w) \ \in \ \mathbb{R}^4 \ \mid \ (x,y,z,w)\in\mathcal{V} \ \textit{ και } \ (x,y,z,w)\in\mathcal{W}\big\} \\ &= \big\{(x,y,z,w) \ \in \ \mathbb{R}^4 \ \mid \ 2x+3y+z=0 \ \textit{ και } \ x-y+w\big\} \\ &= \big\{(x,y,z,w) \ \in \ \mathbb{R}^4 \ \mid \ x=-\frac{3}{5}w-\frac{1}{5}z \ \textit{ και } \ y=\frac{2}{5}w-\frac{1}{5}z\big\} \\ &= \big\{(-\frac{3}{5}w-\frac{1}{5}z,\frac{2}{5}w-\frac{1}{5}z,z,w) \ \in \ \mathbb{R}^4 \ \mid \ x,y,w\in\mathbb{R}\big\} \\ &= \big\{z(-\frac{1}{5},-\frac{1}{5},1,0)+w(-\frac{3}{5},\frac{2}{5},0,1) \ \in \ \mathbb{R}^4 \ \mid \ z,w\in\mathbb{R}\big\} \\ &= \big\langle(-\frac{1}{5},-\frac{1}{5},1,0),(-\frac{3}{5},\frac{2}{5},0,1)\big\rangle \end{aligned}$$

Το σύνολο $\{(-\frac{1}{5},-\frac{1}{5},1,0),(-\frac{3}{5},\frac{2}{5},0,1)\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και άρα αποτελεί μια βάση του υπόχωρου $\mathcal{V}\cap\mathcal{W}$. Για να βρούμε το ορθογώνιο συμπλήρωμα $(\mathcal{V}\cap\mathcal{W})^\perp$ πρέπει να λύσουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} \big\langle(-\frac{1}{5},-\frac{1}{5},1,0),(x,y,z,w)\big\rangle=0 \\ \\ \big\langle(-\frac{3}{5},\frac{2}{5},0,1),(x,y,z,w)\big\rangle=0 \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} -x-y+5z=0 \\ \\ -3x+2y+5w=0 \end{cases}$$

Από τη πρώτη εξίσωση έχουμε $x=-y+5z$ και αντικαθιστώντας στη δεύτερη βρίσκουμε $y=3z-w$ και άρα $x=2z+w$. Τότε:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{V}\cap\mathcal{W})^{\perp} &= \Big\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 \mid \Big\langle(-\frac{1}{5},-\frac{1}{5},1,0),(x,y,z,w)\Big\rangle = 0 \ \ \textit{και} \ \ \Big\langle(-\frac{3}{5},\frac{2}{5},0,1),(x,y,z,w)\Big\rangle = 0\Big\} \\
&= \Big\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 \mid -x-y+5z=0 \ \ \textit{και} \ \ -3x+2y+5w=0\Big\} \\
&= \Big\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 \mid x=2z+w \ \ \textit{και} \ \ y=3z-w\Big\} \\
&= \Big\{(2z+w,3z-w,z,w)\in\mathbb{R}^4 \mid z,w\in\mathbb{R}\Big\} \\
&= \Big\{z(2,3,1,0)+w(1,-1,0,1)\in\mathbb{R}^4 \mid z,w\in\mathbb{R}\Big\} \\
&= \Big\langle(2,3,1,0),(1,-1,0,1)\Big\rangle
\end{aligned}$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι το σύνολο

$$\Big\{(2,3,1,0),\ (1,-1,0,1)\Big\}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητο και άρα αποτελεί μια βάση του $(\mathcal{V}\cap\mathcal{W})^{\perp}$.

Δουλεύοντας διαφορετικά θα μπορούσε κανείς να θεωρήσει την βάση $\{(-\frac{1}{5},-\frac{1}{5},1,0),(-\frac{3}{5},\frac{2}{5},0,1)\}$ του $\mathcal{V}\cap\mathcal{W}$ και με την διαδικασία Gram-Schmidt να βρει μια ορθοκανονική βάση $\{\vec{\varepsilon}_1,\vec{\varepsilon}_2\}$ του $\mathcal{V}\cap\mathcal{W}$. Συμπληρώνοντας την ορθοκανονική αυτή βάση σε μια ορθοκανονική βάση $\{\vec{\varepsilon}_1,\vec{\varepsilon}_2,\vec{\varepsilon}_3,\vec{\varepsilon}_4\}$ του $\mathbb{R}^4$, έπεται ότι το σύνολο διανυσμάτων $\{\vec{\varepsilon}_3,\vec{\varepsilon}_4\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του $(\mathcal{V}\cap\mathcal{W})^{\perp}$. □

Άσκηση 4. *Έστω ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^3$ εφοδιασμένος με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο και έστω*

$$\mathcal{V} = \Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ \mid \ x-y-z=0\Big\}$$

(1) *Να βρεθούν ορθοκανονικές βάσεις των υποχώρων $\mathcal{V}$ και $\mathcal{V}^{\perp}$.*
(2) *Να γραφεί το διάνυσμα $\vec{x}=(2,-1,0)$ ως $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$, όπου $\vec{y}\in\mathcal{V}$ και $\vec{z}\in\mathcal{V}^{\perp}$.*

Λύση. *Έχουμε:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} &= \Big\{(x,y,z)\ \in\ \mathbb{R}^3 \ \mid\ x-y-z=0\Big\} \\
&= \Big\{(x,y,z)\ \in\ \mathbb{R}^3 \ \mid\ x=y+z\Big\} \\
&= \Big\{(y+z,y,z)\ \in\ \mathbb{R}^3 \ \mid\ y,z\in\mathbb{R}\Big\} \\
&= \Big\{y(1,1,0)+z(1,0,1)\ \in\ \mathbb{R}^3 \ \mid\ y,z\in\mathbb{R}\Big\} \\
&= \langle(1,1,0),(1,0,1)\rangle
\end{aligned}$$

Το σύνολο $\{(1,1,0),(1,0,1)\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και άρα αποτελεί μια βάση του $\mathcal{V}$. Αφού $\langle(1,1,0),(1,0,1)\rangle = 1 \neq 0$ έπεται ότι τα διανύσματα δεν είναι κάθετα μεταξύ τους. Άρα για να βρούμε μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}$ εφαρμόζουμε τη διαδικασία Gram-Schmidt.

<u>Διαδικασία Gram-Schmidt</u>:

Θέτουμε $\vec{x}_1=(1,1,0)$ και $\vec{x}_2=(1,0,1)$. Τότε $\vec{y}_1=\vec{x}_1=(1,1,0)$ και

$$\begin{aligned}
\vec{y}_2 = \vec{x}_2 - \frac{\langle\vec{x}_2,\vec{y}_1\rangle}{\langle\vec{y}_1,\vec{y}_1\rangle}\cdot\vec{y}_1 &= (1,0,1) - \frac{\langle(1,0,1),(1,1,0)\rangle}{\langle(1,1,0),(1,1,0)\rangle}\cdot(1,1,0) \\
&= (1,0,1) - \frac{1}{2}\cdot(1,1,0) \\
&= (\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1)
\end{aligned}$$

Υπολογίζουμε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{y}_1$ και $\vec{y}_2$:

$$\|\vec{y}_1\| = \|(1,1,0)\| = \sqrt{\langle(1,1,0),(1,1,0)\rangle} = \sqrt{2}$$

$$\|\vec{y}_2\| = \|(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1)\| = \sqrt{\Big\langle(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1),(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1)\Big\rangle} = \sqrt{\frac{6}{4}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Τότε η ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}$ είναι

$$\text{OKB}: \ \big\{\vec{z}_1, \vec{z}_2\big\} = \big\{\vec{z}_1 = \frac{\vec{y}_1}{\|\vec{y}_1\|}, \vec{z}_2 = \frac{\vec{y}_2}{\|\vec{y}_2\|}\big\} = \big\{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})\big\}$$

Για τον $\mathcal{V}^\perp$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}^\perp &= \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \langle (1,1,0), (x,y,z)\rangle = 0 \ \ \textit{και} \ \ \langle (1,0,1), (x,y,z)\rangle = 0\big\} \\
&= \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y=0 \ \ \textit{και} \ \ x+z=0\big\} \\
&= \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y=-x \ \ \textit{και} \ \ z=-x\big\} \\
&= \big\{(x,-x,-x) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\big\} \\
&= \big\langle (-1,1,1)\big\rangle
\end{aligned}$$

Συνεπώς το σύνολο $\{(-1,1,1)\}$ αποτελεί μια βάση του $\mathcal{V}^\perp$ και άρα μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}^\perp$ είναι $\{(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})\}$.

Αφού $\mathbb{R}^3 = \mathcal{V} \oplus \mathcal{V}^\perp$ έπεται ότι

$$(2,-1,0) = \kappa(1,1,0) + \lambda(1,0,1) + \mu(-1,1,1) = (\kappa+\lambda-\mu, \kappa+\mu, \lambda+\mu) \implies \begin{cases} \kappa+\lambda-\mu = 2 \\ \kappa+\mu = -1 \\ \lambda+\mu = 0 \end{cases}$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα βρίσκουμε ότι $\kappa = 0$, $\lambda = 1$ και $\mu = -1$ και άρα

$$(2,-1,0) = 0 \cdot (1,1,0) + 1 \cdot (1,0,1) + (-1) \cdot (-1,1,1)$$

Επομένως δείξαμε πράγματι ότι το διάνυσμα $\vec{x} = (2,-1,0)$ γράφεται ως $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, όπου $\vec{y} = (1,0,1) \in \mathcal{V}$ και $\vec{z} = (1,-1,-1) \in \mathcal{V}^\perp$. $\square$

Άσκηση 5. *Έστω ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^3$ εφοδιασμένος με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο και έστω η γραμμική απεικόνιση*

$$f \ : \ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (x-y, \ y-z, \ z-x)$$

(1) *Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση της εικόνας* $\mathsf{Im}(f)$ *της f.*
(2) *Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του ορθοσυμπληρωματικού υποχώρου* $\mathsf{Im}(f)^\perp$.

Λύση. *Θεωρούμε την κανονική βάση $\{\vec{e}_1 = (1,0,0), \vec{e}_2 = (0,1,0), \vec{e}_3 = (0,0,1)\}$ του $\mathbb{R}^3$, και τότε γνωρίζουμε ότι $\mathsf{Im}(f) = \langle f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), f(\vec{e}_3)\rangle$. Έτσι θα έχουμε:*

$$\mathsf{Im}(f) = \langle f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)\rangle = \langle (1,0,-1), (-1,1,0), (0,-1,1)\rangle = \langle (1,0,-1), (-1,1,0)\rangle$$

αφού $(-1)\cdot(1,0,-1) + (-1)\cdot(-1,1,0) = (0,-1,1)$. Το σύνολο

$$\big\{(1,0,-1), \ (-1,1,0)\big\}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητο και άρα αποτελεί μια βάση της εικόνας $\mathsf{Im}(f)$ της f. Αφού $\langle (1,0,-1), (-1,1,0)\rangle = -1 \neq 0$ έπεται ότι τα διανύσματα δεν είναι κάθετα μεταξύ τους και άρα για να βρούμε μια ορθοκανονική βάση της εικόνας $\mathsf{Im}(f)$ εφαρμόζουμε τη διαδικασία Gram-Schmidt.

Διαδικασία Gram-Schmidt:

Θέτουμε $\vec{x}_1 = (1,0,-1)$ *και* $\vec{x}_2 = (-1,1,0)$. *Τότε* $\vec{y}_1 = \vec{x}_1 = (1,0,-1)$ *και*

$$\begin{aligned}
\vec{y}_2 = \vec{x}_2 - \frac{\langle \vec{x}_2, \vec{y}_1\rangle}{\langle \vec{y}_1, \vec{y}_1\rangle}\cdot \vec{y}_1 &= (-1,1,0) - \frac{\langle (-1,1,0),(1,0,-1)\rangle}{\langle (1,0,-1),(1,0,-1)\rangle}\cdot (1,0,-1) \\
&= (-1,1,0) + \frac{1}{2}\cdot (1,0,-1) \\
&= (-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2})
\end{aligned}$$

Υπολογίζουμε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{y}_1$ *και* $\vec{y}_2$*:*

$$\|\vec{y}_1\| = \|(1,0,-1)\| = \sqrt{\langle (1,0,-1),(1,0,-1)\rangle} = \sqrt{2}$$

$$\|\vec{y}_2\| = \|(-\frac{1}{2},1,-\frac{1}{2})\| = \sqrt{\big\langle (-\frac{1}{2},1,-\frac{1}{2}),(-\frac{1}{2},1,-\frac{1}{2})\big\rangle} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Τότε η ορθοκανονική βάση της εικόνας $\mathsf{Im}(f)$ *είναι*

$$\textit{OKB}: \ \big\{\vec{z}_1, \vec{z}_2\big\} = \Big\{\vec{z}_1 = \frac{\vec{y}_1}{\|\vec{y}_1\|},\ \vec{z}_2 = \frac{\vec{y}_2}{\|\vec{y}_2\|}\Big\} = \Big\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1),\ \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,-1)\Big\}$$

Στη συνέχεια βρίσκουμε τον ορθοσυμπληρωματικό υπόχωρο της εικόνας $\mathsf{Im}(f)$. *Έχουμε:*

$$\begin{aligned}
\mathsf{Im}(f)^{\perp} &= \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \langle (1,0,-1),(x,y,z)\rangle = 0 \ \textit{ και } \ \langle (-1,1,0),(x,y,z)\rangle = 0\big\} \\
&= \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x - z = 0 \ \textit{ και } \ -x + y = 0\big\} \\
&= \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x = y = z\big\} \\
&= \big\{(x,x,x)\in\mathbb{R}^3 \mid x\in\mathbb{R}\big\} \\
&= \big\langle (1,1,1)\big\rangle
\end{aligned}$$

Άρα το σύνολο $\{(1,1,1)\}$ *αποτελεί μια βάση του υπόχωρου* $\mathsf{Im}(f)^{\perp}$ *και άρα το σύνολο* $\{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\}$ *είναι μια ορθοκανονική βάση του ορθοσυμπληρωματικού υποχώρου* $\mathsf{Im}(f)^{\perp}$. □

Άσκηση 6. *Θεωρούμε τα ακόλουθα διανύσματα του* $\mathbb{R}^4$*:*

$$\vec{\varepsilon}_1 = (2,-3,1,0), \quad \vec{\varepsilon}_2 = (7,3,0,1), \quad \vec{\varepsilon}_3 = (-1,0,1,0), \quad \vec{\varepsilon}_4 = (0,1,1,1)$$

Να βρεθεί ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle\!\langle\, , \rangle\!\rangle$ *στον* $\mathbb{R}^4$ *έτσι ώστε το σύνολο* $\mathcal{B} = \{\vec{\varepsilon}_1,\ \vec{\varepsilon}_2,\ \vec{\varepsilon}_3,\ \vec{\varepsilon}_4\}$ *να αποτελεί ορθοκανονική βάση του* $\mathbb{R}^4$.

Λύση. *Καταρχήν το σύνολο* $\mathcal{B} = \{\vec{\varepsilon}_1,\ \vec{\varepsilon}_2,\ \vec{\varepsilon}_3,\ \vec{\varepsilon}_4\}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο διότι η ορίζουσα του πίνακα :*

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 7 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

των συνιστωσών των διανυσμάτων του συνόλου $\mathcal{B}$ *είναι ίση με* $24 \neq 0$. *Επομένως το σύνολο* $\mathcal{B}$ *αποτελεί μια βάση του* $\mathbb{R}^4$.

Έστω $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^4$. *Αφού το σύνολο* $\mathcal{B}$ *είναι βάση έχουμε μοναδική γραφή αυτών των διανυσμάτων ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων της βάσης* $\mathcal{B}$*:*

$$\vec{x} = x_1\vec{\varepsilon}_1 + x_2\vec{\varepsilon}_2 + x_3\vec{\varepsilon}_3 + x_4\vec{\varepsilon}_4 \quad \textit{και} \quad \vec{y} = y_1\vec{\varepsilon}_1 + y_2\vec{\varepsilon}_2 + y_3\vec{\varepsilon}_3 + y_4\vec{\varepsilon}_4$$

όπου: $x_i, y_i \in \mathbb{R}$. *Ορίζουμε την απεικόνιση*

$$\langle\!\langle\, , \rangle\!\rangle : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}, \ \ \langle\!\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle\!\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$$

Τότε όπως μπορούμε να δούμε εύκολα η απεικόνιση $\langle\!\langle\, , \rangle\!\rangle : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ *είναι ένα εσωτερικό γινόμενο στον* $\mathbb{R}^4$.

Ως προς το εσωτερικό γινόμενο $\langle\!\langle\, ,\rangle\!\rangle$ η βάση $\mathcal{B}$ είναι προφανώς ορθοκανονική.

Για παράδειγμα υπολογίζουμε ότι $\langle\!\langle\vec{\varepsilon}_1,\vec{\varepsilon}_1\rangle\!\rangle = 1\cdot 1 = 1$, $\langle\!\langle\vec{\varepsilon}_1,\vec{\varepsilon}_2\rangle\!\rangle = 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 0 = 0$ και γενικότερα ισχύει: $\langle\!\langle\vec{\varepsilon}_i,\vec{\varepsilon}_j\rangle\!\rangle = \delta_{ij}$ *για κάθε* $1 \leq i,j \leq 4$.

Για την εύρεση του εσωτερικού γινομένου στην κανονική βάση του $\mathbb{R}^4$, δηλαδή για την εύρεση της τιμής της απεικόνισης

$$\langle\!\langle(a_1,a_2,a_3,a_4),\ (b_1,b_2,b_3,b_4)\rangle\!\rangle$$

της απεικόνισης $\langle\!\langle,\rangle\!\rangle$, συναρτήσει των a_i και b_i, εκφράζουμε τα διανύσματα $\vec{x} = (a_1,a_2,a_3,a_4)$ και $\vec{y} = (b_1,b_2,b_3,b_4)$ συναρτήσει των διανυσμάτων της βάσης $\{\vec{\varepsilon}_1,\ \vec{\varepsilon}_2,\ \vec{\varepsilon}_3,\ \vec{\varepsilon}_4\}$ και χρησιμοποιούμε τη σχέση $\langle\!\langle\vec{x},\vec{y}\rangle\!\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$. $\square$

Άσκηση 7. *Έστω $\vec{e}$ ένα μοναδιαίο διάνυσμα σε έναν Ευκλείδειο χώρο $(\mathcal{E},\langle,\rangle)$. Να δείξετε ότι κάθε διάνυσμα $\vec{x}\in\mathcal{E}$ γράφεται μοναδικά ως εξής:*

$$\vec{x} = \alpha\vec{e} + \vec{y}, \quad \textit{όπου:}\ \ \alpha\in\mathbb{R} \quad \textit{και} \quad \langle\vec{y},\vec{e}\rangle = 0$$

Ο μοναδικά προσδιορισμένος από το διάνυσμα $\vec{x}$ αριθμός α καλείται η αριθμητική προβολή του $\vec{x}$ στην διεύθυνση του $\vec{e}$ και συμβολίζεται με: $\alpha := \pi_{\vec{e}}(\vec{x})$ [2].

Να αποδείξετε τα ακόλουθα, $\forall\vec{x},\vec{y}\in\mathcal{E}$ και $r\in\mathbb{R}$:

(1) $\pi_{\vec{e}}(\vec{x}+\vec{y}) = \pi_{\vec{e}}(\vec{x}) + \pi_{\vec{e}}(\vec{y})$.
(2) $\pi_{\vec{e}}(r\vec{x}) = r\pi_{\vec{e}}(\vec{x})$
(3) $\pi_{\vec{e}}(\vec{x}) = \langle\vec{x},\vec{e}\rangle$.
(4) *Αν $\mathcal{B} = \{\vec{\varepsilon}_1,\ \vec{\varepsilon}_2,\ \cdots,\ \vec{\varepsilon}_n\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{E}$, να δείξετε ότι:*

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n}\pi_{\vec{\varepsilon}_i}(\vec{x})\vec{\varepsilon}_i = \sum_{i=1}^{n}\langle\vec{x},\vec{\varepsilon}_i\rangle\vec{\varepsilon}_i = \langle\vec{x},\vec{\varepsilon}_1\rangle\vec{\varepsilon}_1 + \langle\vec{x},\vec{\varepsilon}_2\rangle\vec{\varepsilon}_2 + \cdots + \langle\vec{x},\vec{\varepsilon}_n\rangle\vec{\varepsilon}_n$$

Λύση. *Συμπληρώνουμε το διάνυσμα $\vec{e}$ σε μια ορθοκανονική βάση*

$$\mathcal{C} = \big\{\vec{e},\vec{e}_2,\cdots,\vec{e}_n\big\}$$

του $\mathcal{E}$. Έστω $\mathcal{V} = \{\kappa\vec{e} \mid \kappa\in\mathbb{R}\}$ ο υπόχωρος του $\mathcal{E}$ που παράγεται από το $\vec{e}$, και $\mathcal{W}$ ο υπόχωρος του που παράγεται από τα διανύσματα $\{\vec{e}_2,\cdots,\vec{e}_n\}$. Τότε θα έχουμε

$$\mathcal{E} = \mathcal{V}\oplus\mathcal{W}$$

και άρα κάθε διάνυσμα $\vec{x}\in\mathcal{E}$ γράφεται μοναδικά ως εξής:

$$\vec{x} = \alpha\vec{e} + \vec{y}, \quad \textit{όπου:}\ \ \alpha\in\mathbb{R} \quad \textit{και} \quad \langle\vec{y},\vec{e}\rangle = 0$$

Προφανώς το διάνυσμα $\alpha\vec{e}$ είναι η ορθογώνια προβολή του $\vec{x}$ στον υπόχωρο $\mathcal{V}$ και επομένως $\alpha = \langle\vec{x},\vec{e}\rangle$, διότι το $\vec{e}$ είναι μοναδιαίο. Άρα $\pi_{\vec{e}}(\vec{x}) = \langle\vec{x},\vec{e}\rangle$, και τότε χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου βλέπουμε άμεσα ότι ισχύουν τα (1) και (2).

Τέλος αν $\mathcal{B} = \{\vec{\varepsilon}_1,\ \vec{\varepsilon}_2,\ \cdots,\ \vec{\varepsilon}_n\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{E}$, τότε κάθε διάνυσμα $\vec{x}$ έχει μοναδική γραφή

$$\vec{x} = \langle\vec{x},\vec{\varepsilon}_1\rangle\vec{\varepsilon}_1 + \langle\vec{x},\vec{\varepsilon}_2\rangle\vec{\varepsilon}_2 + \cdots + \langle\vec{x},\vec{\varepsilon}_n\rangle\vec{\varepsilon}_n$$

απ' όπου προκύπτει το ζητούμενο. $\square$

[2] Έτσι, επειδή το $\vec{e}$ είναι μοναδιαίο, η προβολή του $\vec{x}$ στο διάνυσμα $\vec{e}$ είναι το διάνυσμα $\Pi_{\vec{e}}(\vec{x}) = \pi_{\vec{e}}(\vec{x})\vec{e}$